Bearbeiten Sie die Aufgabe

Ein Ball wird unter einem Winkel von $\alpha_{ab}=20°$ von einer Höhe $h_0=1{,}1\ m$ aus schräg nach oben geworfen. Der Betrag der Geschwindigkeit in x-Richtung ist $v_{0x}=9{,}0\ m/s$. Reibungsverluste werden nicht berücksichtigt

1 **Skizziereren Sie** den ungefähren Verlauf der Bahnkurve des Balles vom Abwurf bis zum Aufprall.

Ergänzen Sie die Skizze durch ein geeignetes Koordinatensystem (**Richtung der Achsen**; **Koordinatenursprung**; **keine Skalierung**)

Markieren Sie in dieser Skizze:
- Abwurfort
- Ort der maximalen Höhe
- Aufprallort.

2 **Berechnen Sie** den Betrag v_0 der Abwurfgeschwindigkeit und den Betrag v_{0y} der Abwurfgeschwindigkeit in y-Richtung.

3 **Geben Sie** die Ortsgleichungen $x(t)$ für die x- und $y(t)$ die y-Koordinaten mit eingesetzten Werten **an**.

4 **Geben Sie** die Geschwindigkeitsgleichungen $v_x(t)$ für die x- und $v_y(t)$ für die y-Koordinaten mit eingesetzten Werten **an**.

In den folgenden Aufgaben 5 – 12 arbeiten Sie nur mit den Ortsgleichungen $x(t)$ und $y(t)$ und/oder den Geschwindigkeitsgleichungen $v_x(t)$ und $v_y(t)$.

5 **Berechnen Sie** den Zeitpunkt t_{Auf} des Aufpralles mit Hilfe der Ortsgleichungen.

6 **Zeichnen Sie** unter Verwendung der **Ortsgleichungen** den vollständigen Graphen der Bahnkurve in ein x-y-Digramm (mit Wertetabelle).

7 **Berechnen Sie** die Wurfweite x_{Auf} des Aufprallortes mit Hilfe der Ortsgleichungen.

8 **Berechnen Sie** die Aufprallgeschwindigkeit v_{Auf}.

9 **Berechnen Sie** den Aufprallwinkel α_{auf} des Balles auf den Boden.

10 **Berechnen Sie** den Zeitpunkt t_{Max}, an dem sich der Ball am höchsten befindet.

11 **Berechnen Sie** den Betrag v_{0max} der Gesamtgeschwindigkeit des Balles am höchsten Punkt der Bahnkurve.

12 **Berechnen Sie** die Koordinaten x_{Max} und y_{Max} des Ortspunktes, an dem sich der Ball am höchsten befindet.

13 **Bilden Sie durch Berechnung** aus den Ortsgleichungen $x(t)$ und $y(t)$ die **allgemeine** Gleichung $y(x)$ (Bahngleichung) für die Bahnkurve des Balles in der x-y-Ebene sowie die Bahngleichung **mit eingesetzten Werten**.

In den folgenden Aufgaben 13 – 15 arbeiten Sie nur mit der Bahngleichung $y(x)$.

14 **Zeichnen Sie** unter Verwendung der **Bahngleichung** den vollständigen Graphen der Bahnkurve in ein x-y-Digramm (mit Wertetabelle).

15 **Berechnen Sie** die Wurfweite x_{Auf} des Aufprallortes mit Hilfe der **Bahngleichung**.

16 **Berechnen Sie** den Ortspunkt $M(x_{Max}|y_{Max})$ der maximalen Wurfhöhe mit Hilfe der **Bahngleichung**.

In den folgenden Aufgaben verwenden Sie – je nach Aufgabenstellung – sowohl die Orts- und Geschwindigkeitsgleichungen als auch die Bahngleichung.

17 **Berechnen Sie**, zu welchen Zeitpunkten der Ball eine Höhe von $h_{1,5m}$ = 1,5 m erreicht hat.

18 **Geben Sie** die Höhe h_v **an**, auf der sich der Ball befindet, wenn er sich nach Erreichen des höchsten Bahnpunktes mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag bewegt wie zum Zeitpunkt des Abwurfes. **Begründen Sie** Ihre Antwort.

19 **Kreuzen Sie an**, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

	richtig	falsch
• Am höchsten Punkt der Bahnkurve bleibt der Ball für einen Moment in Ruhe.	☐	☐
• Beim Aufprall auf den Boden erreicht der Ball seinen maximalen Geschwindigkeitsbetrag.	☐	☐
• Der Ball bewegt sich zum Zeitpunkt des Abwurfes mit dem kleinsten Betrag seiner Geschwindigkeit.	☐	☐
• Zum Zeitpunkt t_{Max} befindet sich der Ball am höchsten Punkt M der Bahnkurve. Lässt man zu diesem Zeitpunkt t_{Max} am Ort M einen zweiten Ball senkrecht nach unten fallen, erreichen beide Bälle gleichzeitig den Boden.	☐	☐
• Der waagrechte Wurf ist ein Spezialfall des schrägen Wurfes.	☐	☐

Musterlösung

Ein Ball wird unter einem Winkel von $\alpha_{ab}=20°$ von einer Höhe $h_0=1{,}1\ m$ aus schräg nach oben geworfen. Der Betrag der Geschwindigkeit in x-Richtung ist $v_{0x}=9{,}0\ m/s$. Reibungsverluste werden nicht berücksichtigt

geg: $\alpha_{Ab} = 20°$ $\quad h_0 = 1{,}1\ m$

$v_{0x} = 9{,}0\ \frac{m}{s}$ $\quad g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

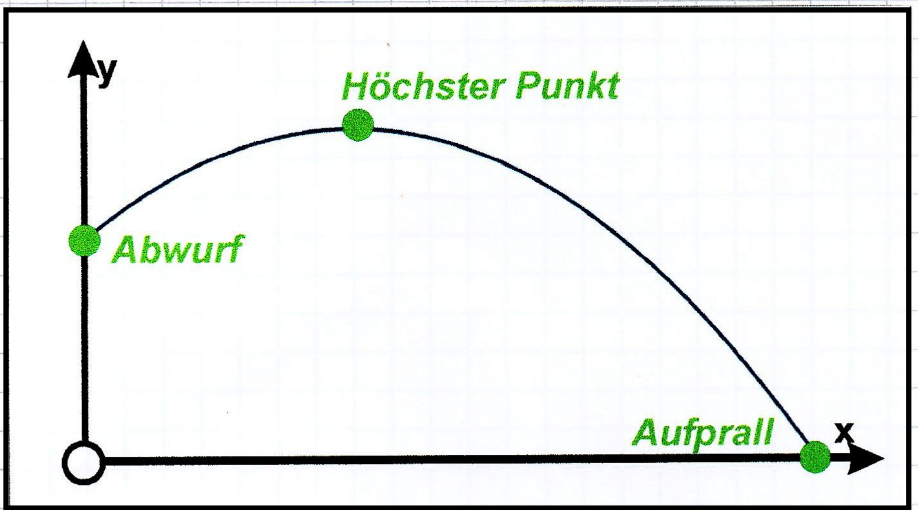
Die allgemeinen Gleichungen finden Sie in Ihrer Formelsammlung.

Ansätze (allgemein) $\quad x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$

1 **Skizziereren Sie** den ungefähren Verlauf der Bahnkurve des Balles vom Abwurf bis zum Aufprall.

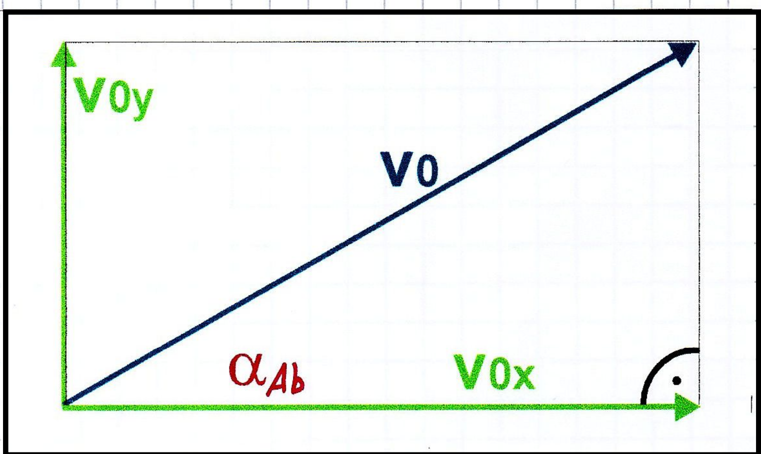
Ergänzen Sie die Skizze durch ein geeignetes Koordinatensystem (**Richtung der Achsen**; **Koordinatenursprung**; **keine Skalierung**)

Markieren Sie in dieser Skizze:
- Abwurfort
- Ort der maximalen Höhe
- Aufprallort.



Operator **Skizzieren**
Operator **Ergänzen**
Operator **Markieren**

2 **Berechnen Sie** den Betrag v_0 der Abwurfgeschwindigkeit und den Betrag v_{0y} der Abwurfgeschwindigkeit in y-Richtung.



$v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha_{Ab})$

$\rightarrow v_0 = \frac{v_{0x}}{\cos(\alpha_{Ab})} = \frac{9{,}0\ \frac{m}{s}}{0{,}9397} = 9{,}5776 = \underline{\underline{9{,}58\ \frac{m}{s}}}$

$v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\alpha_{Ab}) = \underline{\underline{3{,}28\ \frac{m}{s}}}$

Diese Graphik ist nicht gefordert, als Skizze aber durchaus sinnvoll: Zusammenhang zwischen Abwurfwinkel α_{Ab}, den Geschwindigkeitskomponenten v_{0x} und v_{0x} sowie dem Betrag der Abwurfgeschwindigkeit v_0.

Hier sind Kenntnisse in den **Winkelfunktionen** gefragt (Sinus, Cosinus)

3 **Geben Sie** die Ortsgleichungen $x(t)$ für die x- und $y(t)$ die y-Koordinaten mit eingesetzten Werten **an**.

$$x(t) = 9{,}0\,\frac{m}{s}\cdot t \qquad (1)$$

Ortsgleichungen geben den Ort eines bewegten Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t an.

$$y(t) = 1{,}1\,m + 3{,}28\,\frac{m}{s}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s}\cdot t^2 \qquad (2)$$

4 **Geben Sie** die Geschwindigkeitsgleichungen $v_x(t)$ für die x- und $v_y(t)$ für die y-Koordinaten mit eingesetzten Werten **an**.

$$v_x(t) = 9{,}0\,\frac{m}{s} \qquad (3)$$

$$v_y(t) = 3{,}28\,\frac{m}{s} - 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot t \qquad (4)$$

Geschwindigkeits-gleichungen geben die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t an.

In den folgenden Aufgaben 5 – 12 arbeiten Sie nur mit den Ortsgleichungen $x(t)$ und $y(t)$ und/oder den Geschwindigkeitsgleichungen $v_x(t)$ und $v_y(t)$.

5 **Berechnen Sie** den Zeitpunkt t_{Auf} des Aufpralles mit Hilfe der Ortsgleichungen.

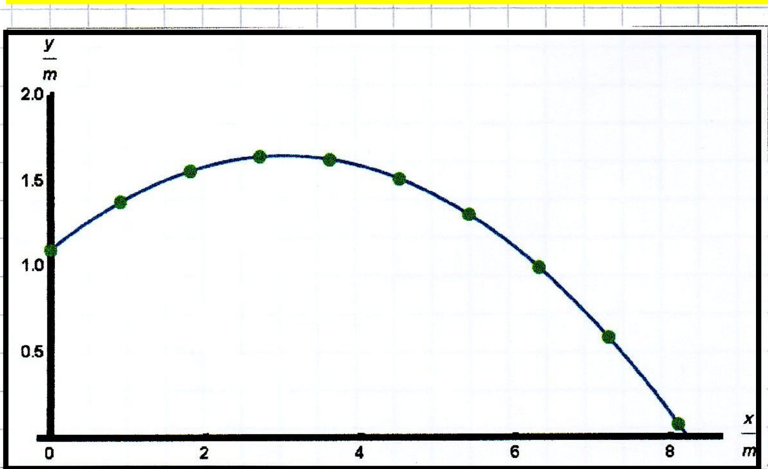
Ansatz: $y(t) = 0 = 1{,}1\,m + 3{,}28\,\frac{m}{s}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$\rightarrow$ (MNF) $\begin{cases} (t_1 = -0{,}2453\,s) & t<0 \\ t_2 = 0{,}9141\,s & t>0 \end{cases}$

$\rightarrow t_{Auf} = 0{,}91\,s \qquad (5)$

MNF: Mitternachtsformel

6 **Zeichnen Sie** unter Verwendung der **Ortsgleichungen** den vollständigen Graphen der Bahnkurve in ein x-y-Digramm (mit Wertetabelle).



t/s	x/m	y/m
0.	0.	1.1
0.1	0.9	1.37852
0.2	1.8	1.55895
0.3	2.7	1.64127
0.4	3.6	1.62549
0.5	4.5	1.51162
0.6	5.4	1.29964
0.7	6.3	0.989562
0.8	7.2	0.581386
0.9	8.1	0.0751089
1.	9.	-0.529268

Operator **Zeichnen**

Achtung:
Die Wertetaballe ist gefordert!

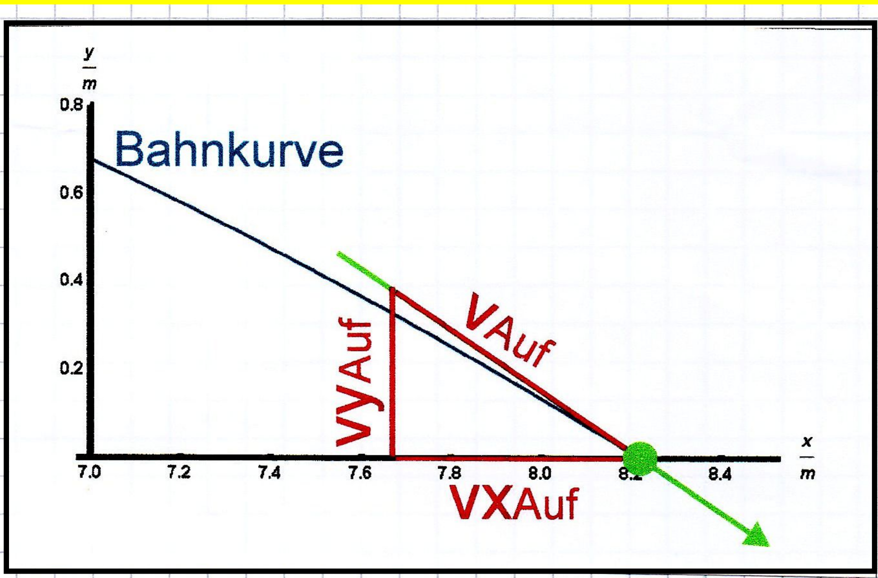
Achtung:
Wertetabelle sind in der Physik beim Zeichnen von Funktionsgraphen immer gefordert !

7 **Berechnen Sie** die Wurfweite x_{Auf} des Aufprallortes mit Hilfe der Ortsgleichungen.

Ansatz: $x_{Auf} = x(t_{Auf}) = 9{,}0\,\frac{m}{s}\cdot 0{,}91\,s = 8{,}19\,m$

Operator **Berechnen**

8 **Berechnen Sie** die Aufprallgeschwindigkeit v_{Auf}.



$v_{Auf}^2 = v_{xAuf}^2 + v_{yAuf}^2$

Diese Graphik ist nicht gefordert:
Berechnung des Geschwindigkeitsbetrages v_{Auf} aus den Komponenten v_{xAuf} und v_{yAuf}.

$$v_{xAuf} = v_{0x} = \underline{9{,}0\,\frac{m}{s}}$$

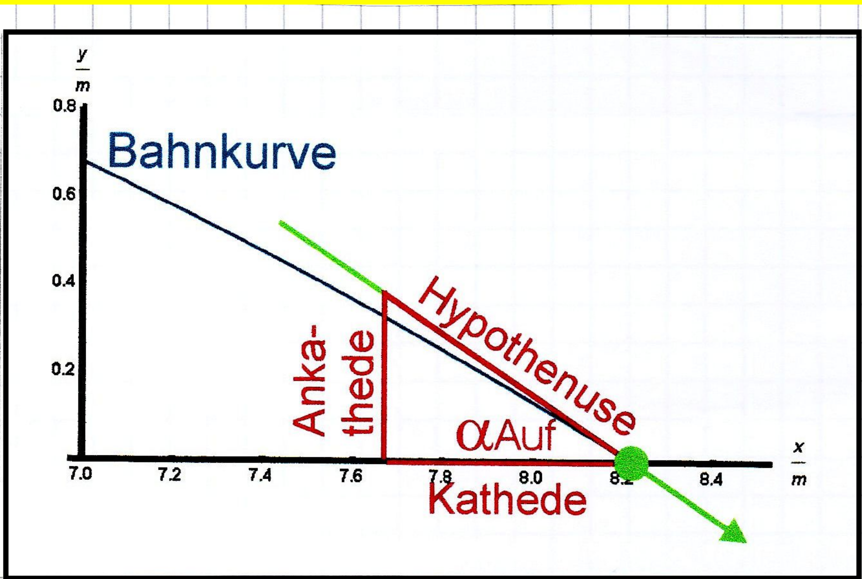
$$v_{yAuf} = v_y(t_{Auf}) = 3{,}28\,\frac{m}{s} - 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}91\,s$$

$$= \underline{-5{,}6471\,\frac{m}{s}}$$

$$v_{Auf} = \sqrt{v_{xAuf}^2 + v_{yAuf}^2} \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$= 10{,}625\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{10{,}6\,\frac{m}{s}}}$$

9 **Berechnen Sie** den Aufprallwinkel α_{auf} des Balles auf den Boden.



Diese Graphik ist nicht gefordert:
Berechnung des Aufprall-Winkels α_{Auf}.

$$v_{x,Auf} = v_{Auf}\cdot \cos(\alpha_{Auf}) \rightarrow \cos(\alpha_{Auf}) = \frac{v_{xAuf}}{v_{Auf}} \rightarrow$$

$$\alpha_{Auf} = \mathrm{ArcCos}\left(\frac{v_{xAuf}}{v_{Auf}}\right) = \mathrm{ArcCos}\left(\frac{9{,}0\,\frac{m}{s}}{10{,}6\,\frac{m}{s}}\right) = \underline{\underline{32^\circ}}$$

10 **Berechnen Sie** den Zeitpunkt t_{Max}, an dem sich der Ball am höchsten befindet.

Ansatz: $v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t = 0 \rightarrow$

$$t = t_{Max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{3{,}28\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{0{,}334\,s}} \quad (6)$$

11 **Berechnen Sie** den Betrag v_{0max} der Gesamtgeschwindigkeit des Balles am höchsten Punkt der Bahnkurve.

$$v_{0Max} = \sqrt{v_{0x\,max}^2 + v_{0y\,max}^2}$$

$$v_{0y\,max} = 0 \rightarrow$$

$$v_{0Max} = v_{0x\,max} = v_{0x} = \underline{\underline{9{,}0\,\frac{m}{s}}}$$

12 **Berechnen Sie** die Koordinaten x_{Max} und y_{Max} des Ortspunktes, an dem sich der Ball am höchsten befindet.

$$x_{Max} = x(t_{Max}) = v_{0x} \cdot t_{max} = 9{,}0\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}334\,s$$

$$= \underline{3{,}01\,m}$$

$$y_{max} = y(t_{Max}) = 1{,}1\,m + 3{,}28\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}334\,s - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}334\,s)^2 =$$

$$\underline{\underline{1{,}65\,s}}$$

13 **Bilden Sie durch Berechnung** aus den Ortsgleichungen *x(t)* und *y(t)* die Gleichung *y(x)* (Bahngleichung) für die Bahnkurve des Balles in der *x-y*-Ebene.

$$(1) \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \text{in } (2) \rightarrow$$

$$y(t) \rightarrow h_0 - \frac{g x^2}{2 v_{0x}^2} + v_{0x} \cdot \tan(\alpha_{AB}) \frac{x}{v_{0x}} \Rightarrow$$

Hier wird durch Elimination der Variablen t aus den beiden **Ortsgleichungen** x(t) und y(t) eine „zeitfreie" **Bahngleichung** y(x) berechnet.

$v_{0y} = v_0 \sin(\alpha_{AB})$ und
$v_0 = v_{0x}/\cos(\alpha_{AB})$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= h_0 + \tan(\alpha_{Ab}) \cdot x - \frac{g}{2v_{0x}^2} \cdot x^2 \\ y(x) &= 1{,}1\,m + 0{,}3640 \cdot x - 0{,}06056\,\frac{1}{m} \cdot x^2 \end{aligned}\right\} (7)$$

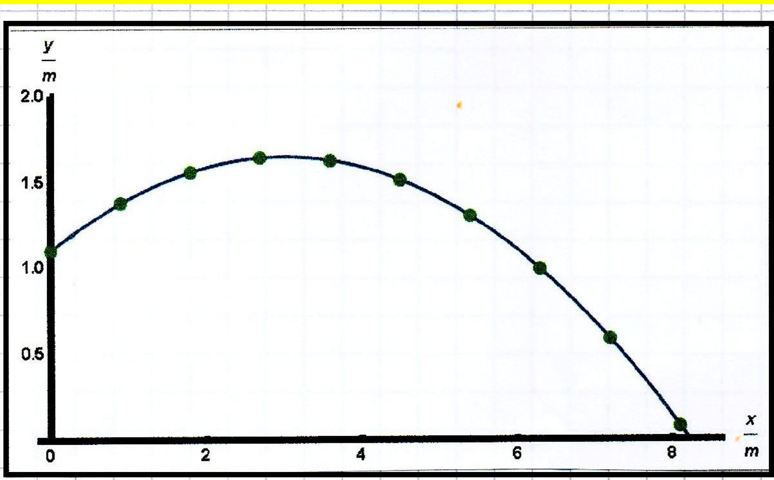
Allgemeine Gleichung

Gleichung mit eingesetzten Werten

In den folgenden Aufgaben 13 – 15 arbeiten Sie nur mit der Bahngleichung *y(x)*.

In den vorhergehenden Aufgaben haben Sie mit den zeitabhängigen Ortsgleichungen gearbeitet. In den folgenden Aufgaben sollen Sie **nur die Bahngleichung verwenden**, auch wenn einige Größen bereits weiter oben berechnet wurden.

14 **Zeichnen Sie** unter Verwendung der **Bahngleichung** den vollständigen Graphen der Bahnkurve in ein *x*-*y*-Digramm (mit Wertetabelle).



$\frac{x}{m}$	$\frac{y}{m}$
0	1.1
1	1.40341
2	1.58572
3	1.64691
4	1.58699
5	1.40596
6	1.10382
7	0.680569
8	0.136206
9	-0.529268

Achtung:
Die Wertetaballe ist gefordert!

15 **Berechnen Sie** die Wurfweite x_{Auf} des Aufprallortes mit Hilfe der **Bahngleichung**.

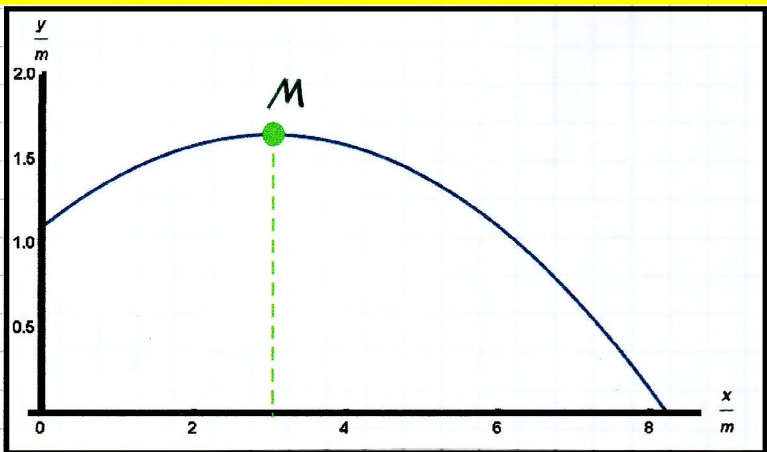
Ansatz: $y(x) = 0 \rightarrow$

$$0 = 1{,}1\,m + \tan(20°)\cdot x - \frac{g}{2\cdot 9{,}0\,\frac{m}{s}}\cdot x^2 \rightarrow$$

$$\text{(MNF)} \quad x_{1,2} = \begin{cases} (-2{,}21\,m) & <0 \\ 8{,}22\,m & >0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\underline{\underline{x_{Auf} = 8{,}22\,m}}$$

16 **Berechnen Sie** den Ortspunkt $M(x_{Max}|y_{Max})$ der maximalen Wurfhöhe mit Hilfe der **Bahngleichung**.



$f(x) = ax^2 + bx + c$
$\rightarrow$ (MNF)

$x_s = \frac{-b}{2a}$

Scheitelstelle einer Parabel

Diese Graphik ist nicht gefordert:
Berechnung der maximalen Wurfhöhe. Der höchste Punkt M ist der Scheitelpunkt der nach unten geöffneten Parabel.

$a = -\frac{g}{2v_{0x}^2}$ $\quad b = \tan(\alpha_{Ab}) \rightarrow \underline{x_s = 3{,}006\,m}$

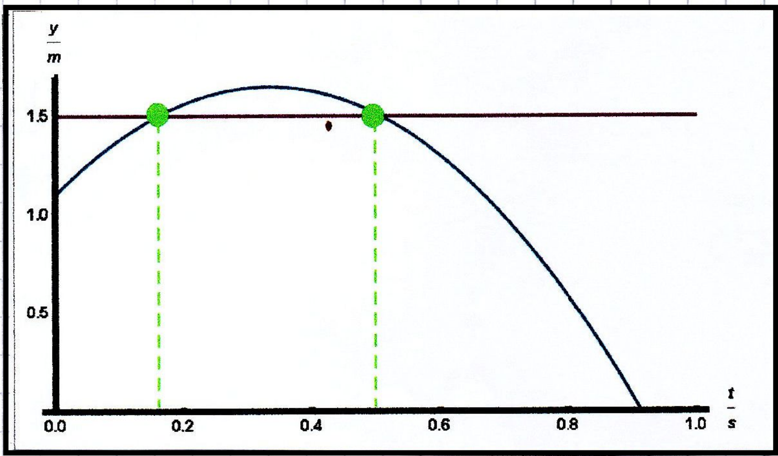
$$Y_S = y(X_S) = 1{,}647\,m \rightarrow \underline{\underline{M(3{,}01\,m \mid 1{,}65\,m)}}$$

Achten Sie darauf, dass nach dem Punkt M gefragt ist, Sie also als Ergebnis auch den Punkt M mit seinen Kooordinaten angeben müssen.

In den folgenden Aufgaben verwenden Sie – je nach Aufgabenstellung – sowohl die Orts- und Geschwindigkeitsgleichungen als auch die Bahngleichung.

In den folgenden Aufgaben müssen Sie selber entscheiden,ob Sie bei deren Lösung die Ortsgleichungen, Geschwindigkeitsgleichungen oder die Bahngleichung verwenden.

17 **Berechnen Sie**, zu welchen Zeitpunkten der Ball eine Höhe von $h_{1,5m} = 1{,}5$ m erreicht hat.



Diese Graphik ist nicht gefordert: Graphischer Hinweis zur Lösung der Aufgabe.

Ansatz:

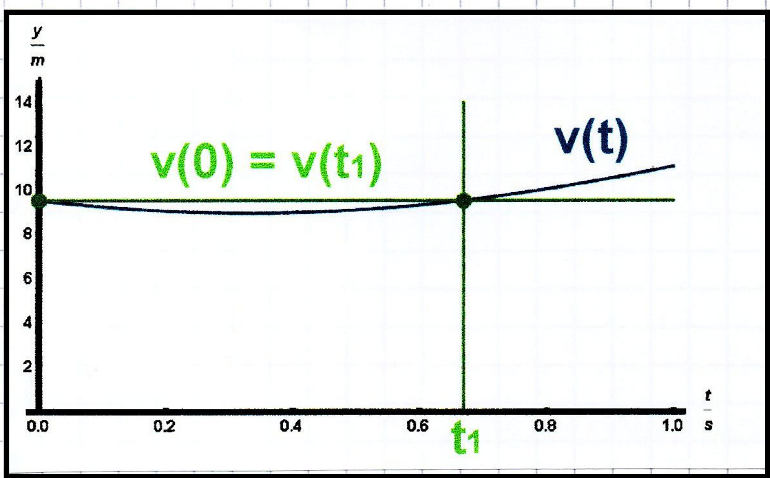
$y(t) = 1{,}5\,m \rightarrow$

$$1{,}5\,m = 1{,}1\,m + 3{,}28\,\frac{m}{s}\cdot t - 4{,}905\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \rightarrow$$

$$(MNF)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{t_1 = 0{,}160\,s}} & > 0 \\ \underline{\underline{t_2 = 0{,}508\,s}} & > 0 \end{array} \right. \quad \underline{\underline{\text{zwei Lösungen}}}$$

Beide mathematische Lösungen t_1 und t_2 sind größer als 0, also gibt es auch zwei physikalisch sinnvolle Lösungen.

18 **Geben Sie** die Höhe h_v **an**, auf der sich der Ball befindet, wenn er sich nach Erreichen des höchsten Bahnpunktes mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag bewegt wie zum Zeitpunkt des Abwurfes. **Begründen Sie** Ihre Antwort.



Operator **Angeben**

Diese Graphik ist nicht gefordert: Graphischer Hinweis zur Lösung der Aufgabe.

Die Anwort kann auch ohne Berechnung beantwortet werden.

Rechnerische Ansatz:

$v_x(t) = 9{,}0\,\frac{m}{s}$

$v_y(t) = 3{,}28\,\frac{m}{s} - 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot t$

$$\rightarrow v = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} =$$

$$= \sqrt{\left(9{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(3{,}28\,\frac{m}{s} - \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot t\right)\right)^2} = 9{,}58\,\frac{m}{s}$$

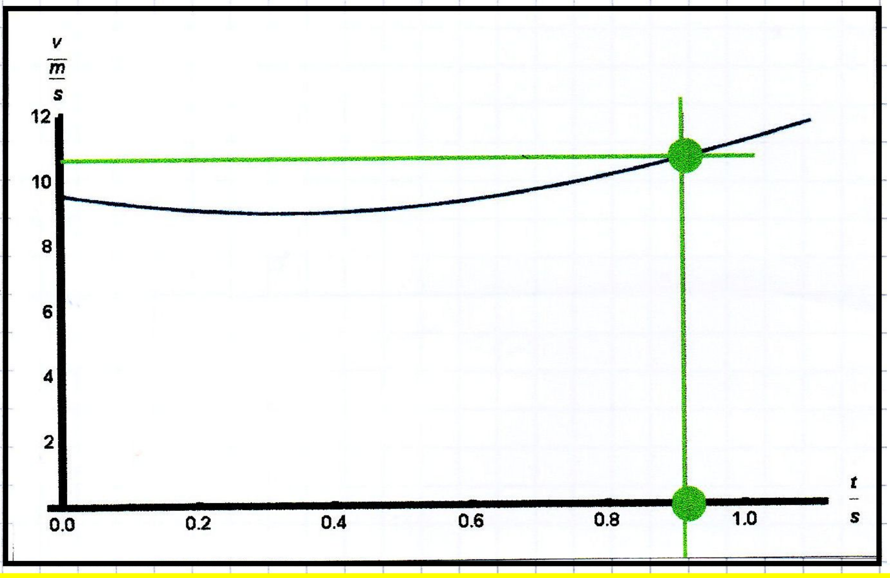
$$\rightarrow t_1 = \begin{cases} (0{,}00\ s) & \text{Start} \\ \underline{0{,}6690\ s} \end{cases}$$

$$y(t_1) = 1{,}1\ \frac{m}{s} + 3{,}28\ \frac{m}{s} \cdot t_1 - 4{,}905\ \frac{m}{s^2} \cdot t_1^2$$

$$= 1{,}099\ m = \underline{\underline{1{,}1\ m}}$$

Multiple Choice: Nur ankreuzen, eine Begründung ist **nicht** gefragt.

19 **Kreuzen Sie an**, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:	**richtig**	**falsch**	
• Am höchsten Punkt der Bahnkurve bleibt der Ball für einen Moment in Ruhe.		X	a)
• Beim Aufprall auf den Boden erreicht der Ball seinen maximalen Geschwindigkeitsbetrag.	X		b)



Bei Multiple Choice-Aufgaben müssen die Antworten **nicht begründet** werden. Hier **trotzdem** jeweils eine kurze Begründung zu den einzelnen Fragen a) bis e):

a) Der Ball bleibt nur in y-Richtung am höchsten Punkt stehen. Dort bewegt er sich aber trotzdem in x-Richtung weiter d.h. $v_{Max}>0$.

b) Zwischen Abwurf und dem höchsten Punkt nimmt der Betrag der Geschwindigkeit des Balles ab, danach nimmt der Geschwindigkeitsbetrag wieder zu. Erreicht er die Abwurfhöhe, ist der Geschwindigkeitsbetrag gleich dem beim Abwurf. Beim weiteren Fall auf den Boden nimmt der Geschwindigkeitsbetrag nochmals zu.

	richtig	falsch	
• Der Ball bewegt sich zum Zeitpunkt des Abwurfes mit dem kleinsten Betrag seiner Geschwindigkeit.		X	c)
• Zum Zeitpunkt t_{Max} befindet sich der Ball am höchsten Punkt M der Bahnkurve. Lässt man zu diesem Zeitpunkt t_{Max} am Ort M einen zweiten Ball senkrecht nach unten fallen, erreichen beide Bälle gleichzeitig den Boden.	X		d)
• Der waagrechte Wurf ist ein Spezialfall des schrägen Wurfes.	X		e)

[Fortsetzung zu **b)**:] Die Abbildung gibt den Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsbetrag v und der Zeit t wieder. Man erkennt, dass v(t) zum Zeitpunkt des Aufpralles maximal ist.

c) Mit dem geringsten Geschwindigkeitsbetrag bewegt sich der Ball am höchsten Punkt.

d) In y-Richtung bewegt sich der schräg abgeworfene Ball ab dem höchsten Punkt wie ein Ball, der senkrecht fallen gelassen wurde.

e) Ja. Es gilt: $v_0=v_{0x}$, $\alpha_{Ab}=0$ und $v_{0y}=0$.